

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. Гудвин, Великий и Ужасный, демонстрирует жителям Изумрудного города огромный сплошной «золотой» куб. Длина ребра куба 2 фута. Гудвин заявляет, что куб сделан из чистого золота и имеет массу ровно 1000 фунтов. Железный Дровосек сомневается в словах Гудвина и решает их проверить. Он знает, что настоящий золотой кубик с ребром 1 дюйм имеет массу 0.7 фунта. Измерения параметров большого куба совпадают со словами Гудвина — ребро большого куба действительно 2 фута. Но зато масса куба оказалась другой — главные городские весы показали, что куб имеет массу 40 камней. Считайте, что 1 камень = 14 фунтов; 1 фут = 12 дюймов.



а) Выразите длину ребра большого куба в дюймах. Ответ округлите до целых.

Ответ: 24

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

б) Во сколько раз объём большого куба больше объёма маленького кубика? Ответ округлите до целых.

Ответ: 13824

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) Насколько измеренная Железным Дровосеком масса большого куба отличается от заявленной Гудвином массы?

Ответ выразите в фунтах, округлите до целых.

Ответ: 440

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Какую массу имел бы большой куб, если бы он действительно был золотым? Ответ выразите в фунтах, округлите до целых.

Ответ: 9677

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Какие предположения могли высказать жители о кубе Гудвина, не трогая его и не разрушая?

Ответ:

- ✓ Возможно, куб не из золота, а из другого, более лёгкого материала
- Возможно, куб не из золота, а из другого, более тяжёлого материала
- ✓ Возможно, куб не сплошной (имеет полость внутри)
- Возможно, куб из золота, а Железный Дровосек посчитал неправильно
- Невозможно сделать какие-либо предположения, не разрушая куб

Критерий оценивания: 1 балл за верный пункт. Всего 2 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Так как 1 фут = 12 дюймов, то 2 фута (a) = $2 \cdot 12 = 24$ дюйма (a').

б) Объём большого куба $V_6 = 24 \cdot 24 \cdot 24 = 13824$ дюйма³. Объём маленького куба $V_m = 1$ дюйм³. Поэтому объём большого куба в $n = 13824$ раза больше.

в) Железный Дровосек определил, что масса большого куба составляет 40 камней = $40 \cdot 14 = 560$ фунтов. Заявлена масса $m = 1000$ фунтов, так что реальная масса на $\Delta m = 1000 - 560 = 440$ фунтов меньше.

г) Если бы большой куб в самом деле был бы золотым, то он имел бы массу $13824 \cdot 0.7 = 9676.8$ фунта, т. е. примерно $m' = 9677$ фунтов.

д) Итак, масса большого куба существенно меньше, чем должна быть. Значит, либо куб сделан не из золота, а из более лёгкого материала (либо сплава с более лёгким материалом) либо куб не сплошной, а имеет внутри полость. И в том, и в другом случае получается, что Гудвин ввёл жителей в заблуждение, ведь он утверждал, что куб сплошной и из чистого золота!

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 1.
Пункты а, б, в, г)

№ варианта	a , фут	m , фунт	a' , дюйм	n	Δm , фунт	m' , фунт
1	2	1000	24	13824	440	9677
2	1.6	900	19	6859 или 7078	340	4801 или 4955
3	1.8	925	22	10648 или 10078	365	7454 или 7055
4	2.2	950	26	17576 или 18400	390	12303 или 12880
5	2.4	975	29	24389 или 23888	415	17072 или 16722
6	2.6	1025	31	29791 или 30371	465	20854 или 21260
7	2.8	1050	34	39304 или 37933	490	27513 или 26553
8	3	1075	36	46656	515	32659
9	1.7	1100	20	8000 или 8490	540	5600 или 5943
10	1.5	1125	18	5832	565	4082
11	1.9	1150	23	12167 или 11852	590	8517 или 8296
12	2.1	1175	25	15625 или 16003	615	10938 или 11202
13	2.3	1200	28	21952 или 21025	640	15366 или 14718
14	2.5	900	30	27000	340	18900
15	2.7	925	32	32768 или 34012	365	22938 или 23808
16	2.9	950	35	42875 или 42144	390	30013 или 29501
17	2	1000	24	13824	340	9677
18	2	1000	24	13824	365	9677
19	2	1000	24	13824	390	9677
20	2	1000	24	13824	415	9677
21	2	1000	24	13824	465	9677
22	2	1000	24	13824	490	9677
23	2	1000	24	13824	515	9677
24	2	1000	24	13824	540	9677
25	2	1000	24	13824	565	9677
26	2	1000	24	13824	590	9677
27	2	1000	24	13824	615	9677
28	2	1000	24	13824	640	9677
29	2	1000	24	13824	340	9677
30	2	1000	24	13824	365	9677
31	2	1000	24	13824	390	9677

Задание 2. Вариант 1. Элли идёт в волшебных туфельках по тайной тропе к пещере Гингеми. Первые 2 км она шла со скоростью 4 км/ч, затем сделала привал на 30 минут. Следующие 3 км она преодолела за 45 минут и снова сделала остановку на 15 минут. Последние 4.8 км девочка прошла со скоростью, в 1.5 раза большей скорости на первом участке.

а) Сколько времени заняла у Элли вся дорога? Ответ выразите в минутах, округлите до целых.

Ответ: 168

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

б) Найдите среднюю скорость Элли в этом путешествии. Ответ выразите в км/ч, округлите до десятых.

Ответ: 3.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

в) Трусливый Лев стартовал на 10 минут позже Элли и преодолел тот же путь без остановок с постоянной скоростью 3.2 км/ч. Кто добрался до пещеры Гингеми раньше — Лев или Элли?

Ответ:

- Лев
- ✓ Элли
- Одновременно

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Элли начала движение в 08:00. Сколько часов и минут показывали часы, когда до пещеры добрался Трусливый Лев? Ответ запишите в формате ЧЧ:ММ.

Ответ: ответ засчитывается в диапазоне [11:13; 11:15]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Первый участок Элли прошла за $2/4 \text{ ч} = 0.5 \text{ ч} = 30 \text{ минут}$. На последнем участке скорость Элли была равна $4 \cdot 1.5 = 6 \text{ км/ч}$, поэтому она затратила на него $\frac{4.8}{6} = 0.8 \text{ ч} = 48 \text{ минут}$. Тогда общее время Элли:

$$t = 30 \text{ минут} + 30 \text{ минут (первая остановка)} + 45 \text{ минут} + 15 \text{ минут (вторая остановка)} + 48 \text{ минут} = 168 \text{ минут.}$$

Переведём в часы:

$$168 \text{ минут} = 2.8 \text{ часа.}$$

б) Чтобы найти среднюю скорость на всём путешествии, нужно весь путь разделить на всё время (с учётом остановок). Получим:

$$v_{\text{ср}} = \frac{(2 \text{ км} + 3 \text{ км} + 4.8 \text{ км})}{2.8 \text{ ч}} = 3.5 \text{ км/ч.}$$

в) Трусливый Лев потратил на движение:

$$\frac{(2 + 3 + 4.8)}{3.2} = 3.0625 \text{ часа.}$$

Т. е. 3 часа 3.75 минуты. И ещё он вышел на 10 минут позже, т. е. его полное время 3 часа 13.75 минуты. А Элли потратила 2.8 часа = 2 часа 48 минут, так что Элли пришла раньше.

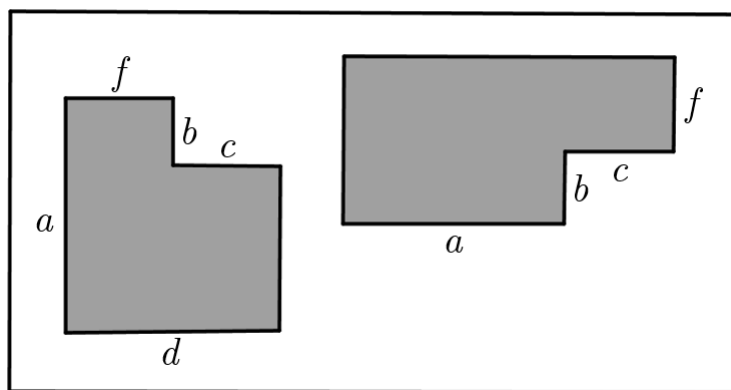
г) Трусливый Лев вышел на 10 минут позже, поэтому, когда он прибыл к пещере, прошло 3 часа 13.75 минуты с момента старта Элли. Часы будут показывать $8 + 3 = 11$ часов и примерно 14 минут.

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2.

Пункты а, б, г)

№ варианта	S_1 , км	S_2 , км	S_3 , км	t , мин	$v_{\text{ср}}$, км/ч	Часы	Минуты
1	2	3	4.8	168	3.5	11	13 или 14, или 15
2	1.5	3.5	5.7	170	3.8	11	30 или 31
3	1.6	3.4	6.2	176	3.8	11	40
4	1.7	3.3	5.4	170	3.7	11	25
5	1.8	3.2	4.9	166	3.6	11	15 или 16
6	1.9	3.1	6.6	185	3.8	11	47 или 45, или 50
7	2.1	3	4.2	164	3.4	11	4 или 0, или 5
8	2.2	2.8	5.6	179	3.6	11	28 или 29, или 30
9	1.4	2.7	4.5	156	3.3	10	51 или 50
10	2.4	2.6	6.7	193	3.6	11	49 или 50
11	2.5	2.5	6.8	196	3.6	11	51 или 50, или 52
12	1.6	3.3	5.4	168	3.7	11	23 или 24, или 25
13	1.8	3.6	5.3	170	3.8	11	30 или 31
14	1.9	3.7	5.2	171	3.8	11	32 или 33, или 35
15	2	3.8	6	180	3.9	11	51 или 50, или 52

Задание 3. Вариант 1. После нескольких ураганов главная стена Изумрудного города оказалась повреждена. На схеме закрашены те участки стены, которые требуют ремонта. Известны следующие параметры: $a = 5$ м, $b = 1.1$ м, $c = 2.2$ м, $d = 4.5$ м. Толщина стены составляет 41 см, а повреждённые участки заменяются полностью.



а) Для ремонта планируется использовать: каменные блоки размерами 25 см на 40 см на 10 см, причём 1 м^3 такого блока имеет массу 2900 кг; цементный раствор, 1 м^3 которого имеет массу 1800 кг. При ремонте важно соблюдать технологию и соотношение материалов: 85 % по объёму — блоки, 15 % — цементный раствор. Блоки доставляют на телегах грузоподъёмностью 1.5 тонны со скоростью 6 км/ч из каменоломни, расположенной в 3 милях от города (1 миля = 1.61 км).

Чему равен параметр f на рисунке? Ответ выразите в метрах, округлите до десятых.

Ответ: 2.3

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) Найдите площадь повреждённых участков. Ответ выразите в квадратных метрах, округлите до сотых.

Площадь участка слева:

Ответ: 20.08 м^2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Площадь участка справа:

Ответ: 22.06 м^2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

в) Сколько каменных блоков понадобится для ремонта обоих участков? Считайте, что блоки при ремонте можно произвольным образом дробить на куски. Ответ округлите до целых.

Ответ: 1469 или 1470

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько рейсов нужно сделать телеге для доставки каменных блоков?

Ответ: 29

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Какое расстояние придётся проехать телеге, доставляющей блоки из каменоломни, чтобы привезти необходимое количество материала для ремонта стены? Считайте, что перед первым рейсом телега стояла у ремонтируемой стены Изумрудного города. Ответ выразите в километрах, округлите до целых.

Ответ: 280

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

е) Сколько времени в общей сложности будет двигаться телега в процессе доставки всех блоков? Ответ выразите в часах, округлите до целых.

Ответ: 47

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

а) По схеме понятно, что $f = d - c = 4.5 - 2.2 = 2.3$ м.

б) Нужно отремонтировать два участка. Площадь первого (левого) участка:

$$S_{\text{Л}} = a \cdot d - b \cdot c = 5 \cdot 4.5 - 1.1 \cdot 2.2 = 20.08 \text{ м}^2.$$

Площадь второго (правого) участка:

$$S_{\text{П}} = (a + c) \cdot (b + f) - b \cdot c = (5 + 2.2) \cdot (1.1 + 2.3) - 1.1 \cdot 2.2 = 22.06 \text{ м}^2.$$

Общая площадь, требующая ремонта, $20.08 + 22.06 = 42.14 \text{ м}^2$.

в) Объём материала, требующего замены: $42.14 \cdot 0.41 = 17.2774 \text{ м}^3$. Один каменный блок имеет объём:

$$0.25 \cdot 0.4 \cdot 0.1 = 0.01 \text{ м}^3.$$

Согласно технологии, блоки занимают:

$$85 \%, \text{ т.е. } 17.2774 \cdot 0.85 = 14.68579 \text{ м}^3.$$

С учетом объёма одного блока нужно $N = \frac{14.68579}{0.01} \approx 1469$ блоков. С учётом округления засчитывается ответ в некотором диапазоне.

г) Масса одного блока $0.01 \cdot 2900 = 29$ килограмм. В телегу можно загрузить не более, чем $1500/29 = 51.7$, т. е. не более 51 блока. Значит, каждый раз телега будет загружена не до конца. Нам необходимо доставить 1469 блоков, то есть нужно совершить $n = \frac{1469}{51} = 28.8$ рейса, т. е. 29 рейсов.

д) Один рейс — это туда-обратно, т. е. $3 + 3 = 6$ миль = 9.66 км. Телеге надо будет проехать:

$$s = 9.66 \cdot 29 = 280.14 \text{ км, т. е. примерно } 280 \text{ км.}$$

е) Скорость телеги 6 км/ч, и если не учитывать остановку, погрузку и т. д., то телеге понадобится:

$$t = \frac{280.14}{6} = 46.69 \text{ часа, т. е. примерно } 47 \text{ часов.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 3.

№ варианта	a , м	b , м	c , м	d , м	f , м	$S_{\text{Л}}$, м ²	$S_{\text{П}}$, м ²	N , шт	n , рейс	s , км	t , ч
1	5	1.1	2.2	4.5	2.3	20.08	22.06	1469 или 1470	29	280	47
2	4	0.8	1.8	4.4	2.6	16.16	18.28	1201 или 1202	24	232	39
3	4.1	0.9	1.9	4.3	2.4	15.92	18.09	1186 или 1187	23 или 24	222 или 232	37 или 39
4	4.2	1	2	4.2	2.2	15.64	17.84	1167 или 1168	23	222	37
5	4.3	1.1	2.1	4.1	2	15.32	17.53	1145 или 1146	23	222	37
6	4.4	1.2	2.2	4	1.8	14.96	17.16	1120 или 1121	22	213	35 или 36
7	4.5	1.3	2.1	3.9	1.8	14.82	17.73	1135 или 1136	22 или 23	213 или 222	35 или 36, или 37
8	4.6	0.8	2	4	2	16.8	16.88	1174 или 1175	23 или 24	222 или 232	37 или 39
9	4.7	0.9	1.9	4.1	2.2	17.56	18.75	1266 или 1267	25	242	40
10	4.8	1	1.8	4.2	2.4	18.36	20.64	1360 или 1361	27	261	43 или 44
11	4.9	1.1	2.4	4.3	1.9	18.43	19.26	1314 или 1315	26	251	42
12	5	1.2	1.8	4.4	2.6	19.84	23.68	1517 или 1518	30	290	48
13	5.1	1.3	1.9	4.5	2.6	20.48	24.83	1580 или 1581	31	299	50
14	5.2	1.2	2	4.6	2.6	21.52	24.96	1620 или 1621	32	309	52
15	5.3	1.1	2.1	4.7	2.6	22.6	25.07	1662 или 1663	33	319	53
16	5.4	1	2.2	4.8	2.6	23.72	25.16	1704 или 1705	33 или 34	319 или 328	53 или 55
17	5.5	0.9	2.3	4.9	2.6	24.88	25.23	1747 или 1748	34 или 35	328	55 или 56